XIX Olimpiadi Italiane di Astronomia

Corso di preparazione alla Finale Nazionale

Categoria Senior – Lezione 2

Problema 1

Una stella dista dal Sole 326.2 anni luce e ha magnitudine apparente m_s= 3.25 e temperatura della fotosfera di 3000 K. Si determini la magnitudine assoluta della stella e il suo raggio in unità di raggi solari e in km.

Soluzione.

Detta **d** la distanza in anni luce, la distanza **D** della stella in parsec vale:

$$D \simeq \frac{d}{3.2616 \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq \frac{326.2\ anni\ luce}{3.2616 \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 100.0\ \text{pc}$$

La magnitudine assoluta $\mathbf{M_s}$ della stella vale:

$$M_S = m_S + 5 - 5 \log d \simeq 3.25 + 5 - 5 \log 100.0 \simeq -1.75$$

Dalla relazione $M_\odot - M_S = -2.5 \log\left(\frac{L_\odot}{L_S}\right)$ ricaviamo:

$$\log\left(\frac{L_\odot}{L_S}\right) \simeq \frac{M_\odot - M_S}{-2.5} \simeq \frac{4.83+1.75}{-2.5} \simeq -2.63$$

da cui: $\frac{L_\odot}{L_S} \simeq 10^{-2.63}$ $\quad L_S \simeq \frac{L_\odot}{10^{-2.63}} \simeq 427 L_\odot$

Detti $\mathbf{R_S}$ e $\mathbf{T_S}$ e $\mathbf{R_\odot}$ e $\mathbf{T_\odot}$ i raggi e le temperature della stella e del Sole, dalla legge di Stefan-Boltzmann:

$$4\pi R_S{}^2 \sigma T_S{}^4 = 427 \cdot 4\pi R_\odot{}^2 \sigma T_\odot{}^4$$

e quindi:

$$R_S = R_\odot \sqrt{427 \left(\frac{T_\odot}{T_S}\right)^4} \simeq R_\odot \sqrt{427 \left(\frac{5778}{3000}\right)^4} \simeq 76.7\ R_\odot \simeq 53.3 \cdot 10^6\ \text{km}$$

La stella è una "gigante rossa", il suo raggio è quasi uguale al semiasse maggiore dell'orbita di Mercurio.

Problema 2

Calcolare la magnitudine media della Luna Piena

Soluzione.

La luminosità della Luna è dovuta alla riflessione della luce che riceve dal Sole. Detti $\boldsymbol{R_\odot}$ e $\boldsymbol{T_\odot}$ il raggio e la temperatura della fotosfera del Sole, la quantità totale di energia $\boldsymbol{L_\odot}$ emessa dal Sole ogni secondo è:

$$L_\odot = 4\,\pi\, {R_\odot}^2\, \sigma\, {T_\odot}^4 \simeq 4\,\pi\, \cdot 4.837\, \cdot\, 10^{17}\, m^2\, \cdot\, 5.670\, \cdot\, 10^{-8}\, \frac{W}{m^2\, K^4} \cdot 1.115\, 10^{15}\, K^4 \simeq 3.843\, \cdot\, 10^{26}\ \mathrm{W}$$

Dette $\boldsymbol{D_T}$ la distanza media Terra-Sole, $\boldsymbol{D_{TL}}$ la distanza media Terra-Luna e $\boldsymbol{D_{L\odot}}$ (=$\boldsymbol{D_T}$+$\boldsymbol{D_{TL}}$) la distanza media Luna-Sole, il flusso solare, ovvero la quantità di energia al secondo che arriva per unità di superficie sulla Terra $\boldsymbol{F_{\odot T}}$ (costante solare) e sulla Luna $\boldsymbol{F_{\odot L}}$ è:

$$F_{\odot T} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, {D_T}^2} \simeq \frac{3.843\, \cdot\, 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\,\pi\, \cdot 2.238\, \cdot\, 10^{22}\, m^2} \simeq 1366\, \frac{W}{m^2} \qquad F_{\odot L} = \frac{L_\odot}{4\,\pi\, {D_{L\odot}}^2} \simeq \frac{3.843\, \cdot\, 10^{26}\ \mathrm{W}}{4\,\pi\, \cdot 2.250\, \cdot\, 10^{22}\, m^2} \simeq 1359\, \frac{W}{m^2}$$

Detto $\boldsymbol{R_L}$ il raggio della Luna, la superficie $\boldsymbol{S_L}$ della Luna che riceve la radiazione solare vale:

$$S_L = \pi\, {R_L}^2 \simeq 9.490\, \cdot\, 10^{12}\, m^2$$

Detto $\boldsymbol{A_L}$ il valore medio dell'albedo lunare, la quantità $\boldsymbol{E_L}$ di energia riflessa ogni secondo dalla Luna vale:

$$E_L = F_{\odot L}\ S_L\, A_L \simeq 1359\, \frac{W}{m^2} \cdot 9.490\, \cdot\, 10^{12}\, m^2\, \cdot 0.136 \simeq 1.754\, \cdot\, 10^{15}\ W$$

La quantità di energia $\boldsymbol{F_{Moon}}$ ricevuta sulla Terra dalla Luna al secondo per unità di superficie è:

$$F_{Moon} = \frac{E_L}{2\,\pi\, {D_{TL}}^2} \simeq \frac{1.754\, \cdot\, 10^{15}\ \mathrm{W}}{2\,\pi\, \cdot 1.478\, \cdot\, 10^{17}\, m^2} \simeq 1.889\, \cdot\, 10^{-3}\, \frac{W}{m^2}$$

Considerando la differenza tra la magnitudine apparente tra il Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ e quella della Luna $\boldsymbol{m_L}$ si ha infine:

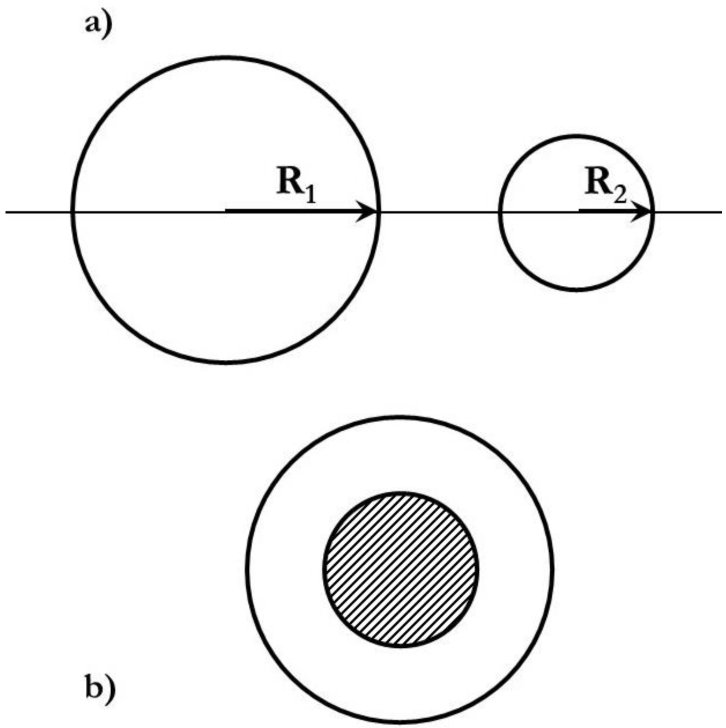
$$m_L = m_\odot + 2.5\, log\, \frac{F_{\odot T}}{F_{Moon}} \simeq -26.74 + 2.5\, log\, \frac{1366\, \frac{W}{m^2}}{1.889\, \cdot\, 10^{-3}\, \frac{W}{m^2}} \simeq -12.09$$

Nota: il valore ottenuto è in ragionevole accordo con quello normalmente indicato come magnitudine media della Luna piena: $\mathrm{m_L} = -12.74$

Problema 3

Un sistema binario a eclisse è formato da due stelle con la stessa temperatura fotosferica. Il raggio della prima stella è pari a quello del Sole, il raggio della seconda stella è pari a metà di quello del Sole. Il piano orbitale del sistema è parallelo alla direzione di osservazione dalla Terra. Di quanto diminuisce, al massimo, la magnitudine della binaria a eclisse quando la seconda stella transita davanti alla prima?

Soluzione.



Detta **T** la temperatura della fotosfera delle due stelle e $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ i rispettivi raggi (con $\mathbf{R_1} = 2\,\mathbf{R_2}$), le luminosità $\mathbf{L_1}$ e $\mathbf{L_2}$ valgono:

$$L_1 = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

$$L_2 = 4\,\pi\,{R_2}^2\,\sigma\,T^4$$

La luminosità $\mathbf{L_{TOT}}$ del sistema fuori eclisse (configurazione **a** nella figura a sinistra) è massima e vale:

$$L_{TOT} = L_1 + L_2 = 4\,\pi\,({R_1}^2 + {R_2}^2)\,\sigma\,T^4$$

Per tutto il tempo dell'eclisse totale, in cui la seconda stella transitando risulta prospetticamente interamente "all'interno" della prima (configurazione **b** nella figura a sinistra), si avrà il minimo di luminosità del sistema $\boldsymbol{L_{Eclisse}}$ che vale:

$$L_{Eclisse} = 4\,\pi\,{R_1}^2\,\sigma\,T^4$$

Dette $\boldsymbol{m_{TOT}}$ la magnitudine del sistema nella configurazione **a)** e $\boldsymbol{m_{Eclisse}}$ la magnitudine nella configurazione **b)**, la variazione di magnitudine Δm è data da:

$$\Delta m = m_{Eclisse} - m_{TOT} = -2.5\log\frac{L_{Eclisse}}{L_{TOT}} = \frac{{R_1}^2}{{R_1}^2 + {R_2}^2} = -2.5\log\frac{4}{5} \simeq 0.24$$

Problema 4

Osservate Marte in una “Grande Opposizione” con un telescopio riflettore f/8 con apertura D=40.0 cm. Quanto valgono il diametro angolare apparente di Marte e le sue dimensioni lineari sul piano focale del telescopio?

Soluzione.

La caratteristica **f/n** di un telescopio indica che la focale **F** del telescopio è **n** volte maggiore dell’apertura, quindi per il telescopio utilizzato sarà:

$$F = D \cdot n = 40.0\ cm \cdot 8 = 320\ cm = 3.20\ m$$

Una Grande Opposizione è un’opposizione in cui la Terra di trova all’afelio e contemporaneamente Marte si trova al Perielio. Dette $\mathbf{D_{TA}}$ e $\mathbf{D_{MP}}$ le distanze dal Sole della Terra all’afelio e di Marte al perielio e $\mathbf{a_T}$, $\mathbf{e_T}$, $\mathbf{a_M}$ ed $\mathbf{e_M}$ i semiassi maggiori e le eccentricità delle orbite della Terra e di Marte, per la distanza Terra-Marte in una Grande Opposizione $\mathbf{D_{TM\text{-}GO}}$ otteniamo:

$$D_{TM-GO} = D_{MP} - D_{TA} = a_M\,(1 - e_M) - a_T\,(1 + e_T)$$

$$D_{TM-GO} \simeq 227.9 \cdot 10^6\ km \cdot (1 - 0.09337) - 149.6 \cdot 10^6\ km \cdot (1 + 0.01673) \simeq 5.452 \cdot 10^7\ km$$

A questa distanza, detto $\boldsymbol{R_M}$ il suo raggio, il diametro apparente di Marte $\boldsymbol{\alpha}$ sarà dato dalla relazione:

$$\alpha = 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{\mathrm{R_{Marte}}}{\mathrm{D_{TM-GO}}}\right) \simeq 2 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{3397\ \mathrm{km}}{5.452 \cdot 10^7}\right) \simeq 7^\circ.140 \cdot 10^{-3} \simeq 25''.70$$

Le sue dimensioni lineari **d** sul piano focale del telescopio saranno:

$$\mathrm{d} = \mathrm{F} \cdot \tan\alpha \simeq 320\ \mathrm{cm} \cdot \tan\,(7^\circ.140 \cdot 10^{-3}) \simeq 0.40\ \mathrm{mm}$$

Problema 5

È stato osservato il transito di un pianeta extrasolare in orbita intorno a una stella di tipo solare. La variazione massima di magnitudine osservata è stata: $\Delta m = 0.010$. Stimate il raggio del pianeta. Se la sua massa è di $1.80 \cdot 10^{27}$ kg, stimate la sua densità e deducete se è un pianeta di tipo gassoso o roccioso. Considerando che le migliori misure fotometriche da Terra hanno una precisione dell'ordine di 0.002 magnitudini, stimate le dimensioni del più piccolo pianeta extrasolare osservabile in orbita attorno a una stella di tipo solare osservabile dalla Terra.

Soluzione.

Detto $\mathbf{R_P}$ il raggio di un pianeta che transita davanti a una stella di raggio $\mathbf{R_S}$, vale la relazione: $\Delta m \simeq \left(\frac{R_P}{R_S}\right)^2$

Quindi nel caso in esame poiché il raggio della stella è pari a quello $\boldsymbol{R_\odot}$ del Sole avremo:

$$R_P \simeq \sqrt{\Delta m} \cdot R_\odot \simeq \sqrt{0.010} \cdot 6.955 \cdot 10^5 \ km \simeq 7.0 \cdot 10^4 \ km$$

Si tratta quindi di un pianeta con dimensioni paragonabili a quelle di Giove. Detta **M** la massa e **V** il volume la sua densità $\boldsymbol{\rho}$ è pari a:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\,M}{4\,\pi\,{R_P}^3} \simeq \frac{3 \cdot 1.80 \cdot 10^{27}\,kg}{4\,\pi \cdot 3.4 \cdot 10^{23}\,m^3} \simeq 1.3 \cdot 10^3 \,\frac{kg}{m^3} \simeq 1.3 \,\frac{g}{cm^3}$$

Poiché massa, raggio e densità sono simili a quelle di Giove ($\boldsymbol{\rho_{Giove}} \simeq 1.3$ g/cm^3) possiamo dedurre che si tratta di un pianeta gassoso.

Il raggio del più piccolo pianeta osservabile dalla superficie della Terra con il metodo dei transiti $\boldsymbol{R_{min}}$ si può ricavare dalla relazione $\Delta m \simeq \left(\frac{R_P}{R_S}\right)^2$ assumendo $\Delta m_{min} \simeq 0.002$. Il valore dipende dal raggio della stella e per una stella di raggio pari a quello del Sole si ha:

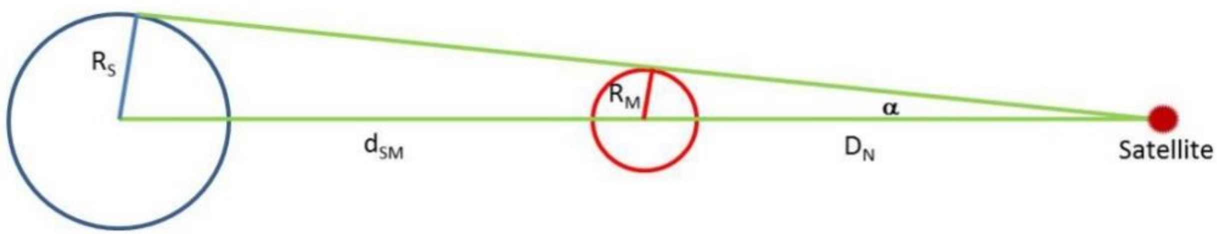
$$R_{min} = \sqrt{\Delta m_{min}} \cdot R_\odot \simeq \sqrt{0.002} \cdot 6.955 \cdot 10^5 \ km \simeq 3 \cdot 10^4 \ km$$

ovvero un pianeta poco più grande di Urano.

Problema 6

Volete mettere in orbita intorno a Marte un satellite artificiale per fotografare eclissi totali di Sole, osservabili quando Marte, visto dal satellite, si sovrappone esattamente al Sole. Considerando per il satellite un'orbita circolare sul piano equatoriale di Marte, calcolate la sua distanza da Marte, il suo periodo orbitale e le dimensioni angolari di Marte (e quindi del Sole) viste dal satellite.

Soluzione.



La configurazione in occasione di un'eclisse totale di Sole vista dal satellite è quella mostrata in figura (disegno non è in scala) dove $\mathbf{D_N}$ è la distanza cercata

Poiché valgono le relazioni: $R_S = (d_{SM} + D_N) \sin \boldsymbol{\alpha}$ e $R_M = D_N \sin \boldsymbol{\alpha}$

ricaviamo: $\frac{R_S}{R_M} = \frac{d_{SM} + D_N}{D_N}$ e infine, trascurando l'eccentricità dell'orbita di Marte:

$$D_N = \frac{d_{SM} \cdot R_M}{R_S - R_M} = \frac{227.9 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot 3397 \text{ km}}{6.955 \cdot 10^5 \text{ km} - 3397 \text{ km}} \simeq 1.119 \cdot 10^6 \text{ km}$$

Detta $\mathbf{M_M}$ la massa di Marte, il periodo orbitale del satellite è dato da:

$$T = \sqrt{\frac{4\,\pi^2 \cdot D_N^3}{G \cdot M_M}} = \sqrt{\frac{39.48 \cdot 1.401 \cdot 10^{27}\, m^3}{6.674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\, s^2} \cdot 6.417 \cdot 10^{23} \text{ kg}}} \simeq 3.594 \cdot 10^7 \text{s} \simeq 1.139 \text{ anni terrestri}$$

Poiché per l'angolo $\boldsymbol{\alpha}$ vale la relazione: $\sin \boldsymbol{\alpha} = \frac{R_M}{D_N}$, le dimensioni apparenti $\boldsymbol{\beta}$ del Sole e di Marte visti dal satellite valgono:

$$\beta = 2 \text{ arcosin } \frac{3397 \text{ km}}{1.119 \cdot 10^6 \text{ km}} \simeq 0°.3479 \simeq 20'\, 52''$$

Nota: Si può dimostrare che l'orbita del satellite non è stabile, in quanto a $1.119 \cdot 10^6$ km da Marte la forza di gravità del pianeta non è in grado di trattenerlo in orbita.

Problema 7

Una nebulosa planetaria si espande in modo isotropo (cioè allo stesso modo in tutte le direzioni) con una velocità costante v = 17.0 km/s. Dal febbraio 1972 al febbraio 2017 le dimensioni angolari del suo raggio sono aumentate da $\alpha_{1972} = 34''.0$ a $\alpha_{2017} = 40''.0$. Calcolate la distanza, in anni luce e in parsec, della nebulosa e il suo diametro nel febbraio 2017 in km e in UA.

Soluzione.

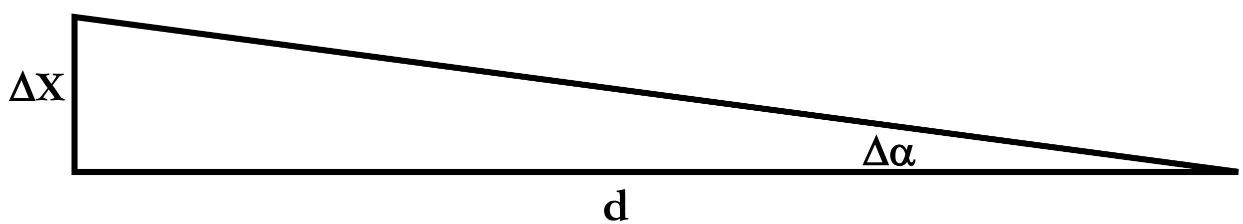
Poiché l'espansione è isotropa e con velocità costante, nei 45 anni ($\mathbf{t} \simeq 1.42 \cdot 10^9$ s) intercorsi tra la prima e la seconda osservazione l'aumento **ΔX** del raggio della nebulosa planetaria è stato di:

$$\Delta X = v \cdot t \simeq 17.0 \frac{km}{s} \cdot 1.42 \cdot 10^9\, s \simeq 2.41 \cdot 10^{10}\, km$$

Nello stesso tempo l'aumento di dimensioni angolari **Δα** è stato di:

$$\Delta\alpha = \alpha_{2017} - \alpha_{1972} \simeq 40.0 - 34''.0 \simeq 6''.0 \simeq 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}$$

La distanza **d** per cui a una variazione lineare **ΔX** corrisponde una variazione angolare **Δα** è:



$$\mathrm{d} = \frac{\Delta \mathrm{X}}{\tan \Delta\boldsymbol{\alpha}} \simeq \frac{2.41 \cdot 10^{10}\, km}{\tan 1^\circ.7 \cdot 10^{-3}} \simeq 8.0 \cdot 10^{14}\ \text{km} \simeq 85 \text{ anni luce} \simeq 26 \text{ parsec}$$

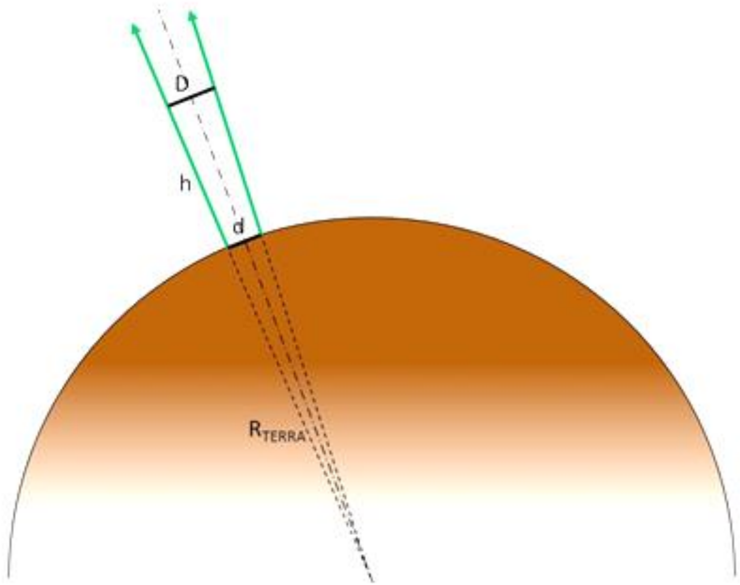
Poiché le dimensioni angolari del raggio della nebulosa valgono attualmente **α** = 40".0 (=$1^\circ.11 \cdot 10^{-2}$), nota la distanza della nebulosa ne ricaviamo il diametro **D** dalla relazione:

$$\mathrm{D} = 2 \cdot \mathrm{d} \cdot \tan\alpha \simeq 2 \cdot 8.0 \cdot 10^{14}\ \text{km} \cdot \tan 1^\circ.11 \cdot 10^{-2} \simeq 3.1 \cdot 10^{11}\ \text{km} \simeq 2.1 \cdot 10^3\ \text{UA}$$

Problema 8

Due puntatori laser di alta potenza distanti 20.0 m l'uno dall'altro, inviano entrambi un sottilissimo fascio di luce in direzione esattamente verticale. Assumendo la superficie della Terra perfettamente sferica, quale sarà la distanza tra i due fasci a un'altezza dal suolo di 70 km?

Soluzione.



Consideriamo la figura a sinistra. Detta **d** la distanza tra i due laser, vogliamo calcolare la separazione **D** dei fasci luminosi all'altezza **h** dalla superficie.

Poiché i due laser puntano esattamente in verticale, i loro ipotetici prolungamenti all'indietro, cioè verso l'interno della Terra, si incontrerebbero esattamente al centro del nostro pianeta.

Essendo **d** piccolo rispetto a $\mathbf{R_{Terra}}$ possiamo trascurare l'effetto della curvatura terrestre e considerare i due triangoli simili in figura, per i quali si può scrivere:

$$R_{TERRA} : d = (R_{TERRA} + h) : D$$

Da cui ricaviamo:

$$D = \frac{(R_{Terra} + h) \cdot d}{R_{Terra}} = \frac{6448 \cdot 10^3 \text{ km} \cdot 20.0 \text{ m}}{6378 \cdot 10^3} \simeq 20.2\, m$$

Problema 9

Un ammasso stellare non risolto è composto da "N" stelle tutte uguali al Sole. L'ammasso si trova a una distanza di $45.0 \cdot 10^3$ anni luce e la sua magnitudine integrata è $m_{TOT} = 15.1$. Calcolare il numero di stelle che compongono l'ammasso.

Soluzione.

La distanza **d** dell'ammasso in parsec vale:

$$d = \frac{45.0 \cdot 10^3 \; anni\ luce}{3.2616 \; \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 1.38 \cdot 10^4 \; pc$$

Detta $\boldsymbol{M_\odot}$ la sua magnitudine assoluta, la magnitudine apparente del Sole $\boldsymbol{m_\odot}$ alla distanza **d** vale:

$$m_\odot = M_\odot - 5 + 5 \log d\,(pc) \simeq 4.83 - 5 + 5 \log\,(1.38 \cdot 10^4) \simeq 20.5$$

Consideriamo la differenza di tra la magnitudine apparente integrata dell'ammasso e quella che avrebbe il Sole visto alla distanza dell'ammasso:

$$m_{TOT} - m_\odot = -2.5 \log \frac{F_{TOT}}{F_\odot} = -2.5 \log \frac{N\, F_\odot}{F_\odot} = -2.5 \log N$$

da cui ricaviamo:

$$N = 10^{\left(\frac{m_\odot - m_{TOT}}{2.5}\right)} \simeq 10^{\left(\frac{20.5 - 15.1}{2.5}\right)} \simeq 145$$

Problema 10

Arturo ($= \alpha\, Boo, m_V = -0.04$) è la stella più luminosa dell'emisfero boreale del cielo. Il flusso proveniente da Arturo che incide alla sommità dell'atmosfera terrestre vale: $\mathrm{f} = 4.51 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2}$. Sapendo che Arturo dista dal Sole 36.7 anni luce e che il suo raggio è 25.5 volte quello del Sole, calcolare la temperatura della sua fotosfera.

Soluzione.

Dette **T** la temperatura della fotosfera di Arturo, $\boldsymbol{R_A}$ il suo raggio e $\boldsymbol{d_A}$ la sua distanza, la quantità di energia totale emessa al secondo (cioè la luminosità) $\boldsymbol{L_A}$ è legata al flusso incidente alla sommità dell'atmosfera della Terra dalla relazione:

$$f = \frac{L_A}{4\,\pi\, d_A^2} = \frac{4\,\pi\, R_A^2\, \sigma\, T^4}{4\,\pi\, d_A^2}$$

da cui, essendo $d_A \simeq 3.47 \cdot 10^{17}\ m$ e $R_A \simeq 17.7 \cdot 10^{9}\ m$, si ricava:

$$T = \sqrt[4]{\frac{f\, d_A^2}{R_A^2\, \sigma}} \simeq \sqrt[4]{\frac{4.51 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2} \cdot 1.20 \cdot 10^{35}\ m^2}{3.13 \cdot 10^{20}\ m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2\, K^4}}} \simeq \sqrt[4]{3.05 \cdot 10^{14}} \simeq 4180\ \mathrm{K}$$

Problema 11

Le Supernovae di Tipo Ia sono fra gli oggetti più luminosi esistenti in natura e possono raggiungere, al massimo di luminosità, una magnitudine assoluta M_{SN} = -21.0. Si consideri una supernova di Tipo Ia esplosa nella galassia M90 dell'Ammasso della Vergine. L'aspetto nel cielo di M90 può essere approssimato a un'ellisse con dimensioni angolari 9'.50 x 4'.50. M90 si trova a $60.0 \cdot 10^6$ anni luce dal Sole e la sua magnitudine apparente superficiale media è m_{sup} = 22.0 mag/arcsec^2. Si calcoli: il modulo di distanza di M90; se la supernova, al massimo di luminosità, è più brillante dell'intera galassia che la ospita e la magnitudine apparente complessiva del sistema galassia + supernova al massimo di luminosità.

Soluzione.

La distanza **d** della galassia in parsec vale: $d = \dfrac{60.0 \cdot 10^6 \; anni\ luce}{3.2616 \, \frac{anni\ luce}{parsec}} \simeq 18.4 \cdot 10^6 \; pc$

Quindi la magnitudine apparente $\mathbf{m_{SN}}$ della supernova al massimo di luminosità è:

$$m_{SN} = M_{SN} - 5 + 5 \log d\,(pc) \simeq -21.0 - 5 + 5 \log\,(18.4 \cdot 10^6) \simeq 10.3$$

ed il modulo di distanza (definito come la differenza tra la magnitudine apparente e quella assoluta) vale:

$$m_{SN} - M_{SN} \simeq 31.3$$

L'area **A** della galassia, in arcsec^2, vale:

$$A = \pi\, a\, b = \pi \, \frac{9'.50 \cdot 60}{2} \cdot \frac{4'.50 \cdot 60}{2} \simeq 121 \cdot 10^3 \; arcsec^2$$

La magnitudine apparente integrata $\mathbf{m_{GAL}}$ della galassia è data da:

$$m_{GAL} = m_{sup} - 2.5 \log A \simeq 22.0 - 2.5 \log\,(121 \cdot 10^3) \simeq 9.3$$

Quindi poiché $m_{GAL} < m_{SN}$, la supernova non diventa, neppure al massimo di luminosità, più brillante dell'intera galassia.

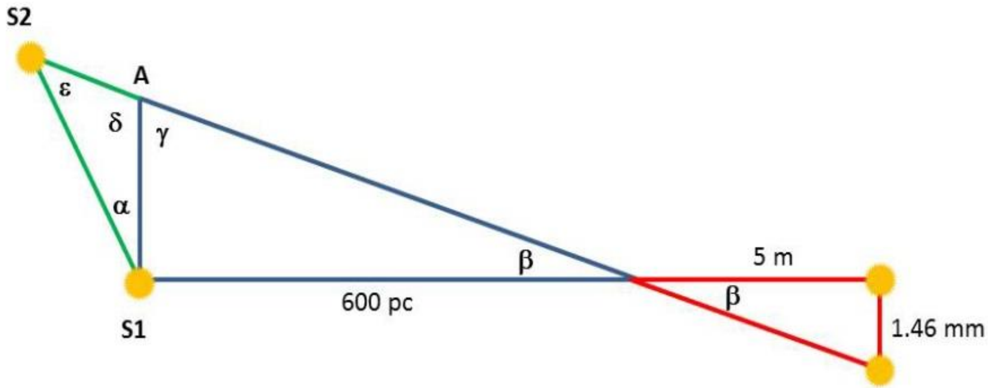
La magnitudine complessiva $\mathbf{m_{TOT}}$ galassia + supernova al massimo si può ottenere con la relazione:

$$m_{TOT} = -2.5 \log(10^{-0.4\, m_{SN}} + 10^{-0.4\, m_{GAL}}) \simeq 8.9$$

Problema 12

Sul piano focale di un telescopio con focale di 500 cm, le due componenti di una binaria visuale distano tra di loro 1.46 mm. Sappiamo che una delle due componenti dista dal Sole 600 pc e che il piano orbitale della binaria forma un angolo $\alpha = 30°$ (con la seconda stella a distanza maggiore della prima) con la perpendicolare alla direzione di osservazione. Calcolare la distanza tra le due stelle della binaria.

Soluzione.



La configurazione descritta nel problema è rappresentata nella figura (non in scala) qui in alto, dove le due stelle sono indicate con **S1** e **S2**. Detta **F** la focale del telescopio e **d** la distanza delle due stelle sul piano focale, la distanza angolare $\boldsymbol{\beta}$ osservata è data dalla relazione:

$$\boldsymbol{\beta} = \text{arctg}\,\frac{d}{F} \simeq arctg\,\frac{1.46\text{ mm}}{5000\text{ mm}} \simeq 1°.67 \cdot 10^{-3} \simeq 1'.00 \simeq 60''.2$$

Detta **D** la distanza della stella S1, la distanza S1-A vale:

$$\text{S1} - \text{A} = \text{D} \cdot \tan\beta \simeq 600\text{ pc} \cdot \tan(1°.67 \cdot 10^{-3}) \simeq 600\,pc \cdot 2.92 \cdot 10^{-4} \simeq 0.175\,pc \simeq 5.41 \cdot 10^{12}\,km$$

Il triangolo S1-S2-A si può risolvere con il teorema dei seni, ma $\boldsymbol{\delta} = 180° - \boldsymbol{\gamma} = 180° - 180 + 90° + \boldsymbol{\beta} = 90°\,1'$ e possiamo quindi approssimarlo a un triangolo rettangolo (il disegno non è in scala) per cui:

$$S1 - S2 = \frac{S1 - A}{\cos\alpha} \simeq \frac{5.41 \cdot 10^{12}\,km}{\cos 30°} \simeq 6.25 \cdot 10^{12}\,km \simeq 4.17 \cdot 10^{4}\,UA$$

Problema 13

Una colonia di gatti neri, tutti perfettamente uguali, si è stabilita su un asteroide nero in orbita attorno al Sole. La colonia è visibile grazie alla luce solare riflessa dagli occhi di tutti i gatti. In un certo istante i gatti hanno tutti gli occhi aperti e la colonia è vista dalla Terra come una stella di magnitudine nella banda V: $m_{1V} = 28.32$. Non appena uno dei gatti chiude gli occhi, la magnitudine osservata diventa: $m_{2V} = 28.52$. Calcolate da quanti gatti (si arrotondi il risultato all'intero più prossimo) è formata la colonia. L'emissione del corpo dei gatti e quella riflessa dall'asteroide sono trascurabili nella banda fotometrica V.

Soluzione.

Detto **f** il flusso riflesso dagli occhi di un gatto e **N** il numero dei gatti, le magnitudini apparenti quando tutti i gatti hanno gli occhi aperti e quando uno li ha chiusi sono date dalle relazioni:

$$m_{1V} = -2.5 \log N \cdot f + C$$

$$m_{2V} = -2.5 \log (N-1) \cdot f + C$$

e quindi:

$$m_{1V} - m_{2V} = -2.5 \log \frac{N}{N-1}$$

da cui:

$$10^{\frac{m_{2V} - m_{1V}}{2.5}} = \frac{N}{N-1}$$

posto: $10^{\frac{m_{2V} - m_{1V}}{2.5}} = K \simeq 1.202$ ricaviamo infine:

$$N \simeq \frac{K}{K-1} \simeq \frac{1.202}{1.202-1} \simeq 6$$

Problema 14

Una foto della Luna al perigeo mostra al centro dell'immagine un cratere di forma circolare le cui dimensioni angolari sono $\boldsymbol{\alpha}$ = 5". Quanto vale in km il diametro del cratere?

Soluzione.

Poiché il cratere è al centro dell'immagine, trascuriamo gli effetti dovuti alla sfericità della Luna.

Detti $\mathbf{a_L}$ ed $\mathbf{e_L}$ il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita della Luna, la distanza della Luna al perigeo $\mathbf{D_{LP}}$ vale:

$$D_{LP} = a_L\,(1 + e_L) \simeq 384.4 \cdot 10^3\ km \cdot (1 - 0.05490) \simeq 363.3 \cdot 10^3\ km$$

Il diametro **d** del cratere sarà quindi dato dalla relazione:

$$\mathrm{d} = \mathrm{D_{LP}} \cdot \tan\alpha \simeq 363.3 \cdot 10^3 \cdot \tan 5'' \simeq 363.3 \cdot 10^3\ \mathrm{km} \cdot \tan\left(\frac{5''}{3600}\right) \simeq 9\ \mathrm{km}$$

Problema 15

Volete costruire un telescopio per fotografare quello che resta sulla superficie della Luna dei moduli di allunaggio (LEM) utilizzati dagli astronauti delle missioni Apollo. Per far ciò avete realizzato un sistema di ottica adattiva per osservazioni a 5500 Å, che permette di annullare completamente gli effetti della turbolenza dell'atmosfera terrestre. La parte inferiore dei LEM aveva un diametro di circa 4.5 m. Che diametro dovrà avere il vostro telescopio? Sapreste suggerire una soluzione più "economica" per realizzare queste foto?

Soluzione.

Il telescopio dovrà avere un potere risolutivo tale da poter distinguere un corpo con un diametro **d** = 4.5 m a una distanza, trascurando l'eccentricità, pari al semiasse maggiore dell'orbita della Luna; ovvero un corpo con diametro angolare **α** pari a:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4.5\ m}{384.4 \cdot 10^6\ m}\right) \simeq 6°.7 \cdot 10^{-7} \simeq 2''.4 \cdot 10^{-3}$$

La relazione che fornisce il potere risolutivo **α** in secondi d'arco di un telescopio con diametro (apertura) **D** che osserva alla lunghezza d'onda **λ** è:

$$\alpha = 1.22\ \frac{\lambda}{D}\ 206265''$$

E quindi ponendo **α** = 2".4 ·10^{-3} ricaviamo:

$$D = 1.22\ \frac{\lambda}{\alpha}\ 206265 \simeq \frac{1.22 \cdot 5500 \cdot 10^{-10} m \cdot 206265''}{2''.4 \cdot 10^{-3}} \simeq 58\ m$$

Si tratterebbe del più grande telescopio mai realizzato, assai più grande del telescopio ELT dell'ESO, attualmente in fase di costruzione (https://elt.eso.org/), il cui costo finale si stima dell'ordine di 1.3 miliardi di euro. Per fotografare i resti delle spedizioni Apollo è molto più economico, come fatto recentemente con il satellite Lunar Reconnaissance Orbiter della NASA il cui costo è stato circa un terzo rispetto a quello di ELT, inviare dei satelliti in orbita bassa attorno alla Luna.

Problema 16

ζ Boötis è una binaria visuale, situata alla distanza di 180 anni luce dal Sistema Solare, composta da 2 stelle identiche. La magnitudine apparente totale del sistema è m_{tot} = 3.79. La separazione angolare tra le due componenti, viste dalla Terra, è α = 1.2”. Questo sistema è osservato alla lunghezza d’onda λ = 5500 Å.

1. Che diametro minimo deve avere un telescopio per riuscire a risolvere il sistema binario?
2. Se la lunghezza focale del telescopio è 1 m e il potere risolutivo dell’occhio è 2’, quanto deve essere la lunghezza focale dell’oculare per riuscire a distinguere le due componenti?
3. Quanto vale la magnitudine assoluta di ciascuna delle due stelle del sistema binario?

Soluzione.

Poiché la separazione angolare tra le due stelle è maggiore del valore medio del seeing (circa 1”) che si registra in buona parte delle località sulla superficie della Terra, possiamo affermare che le due stelle possono essere “risolte” con osservazioni visuali da Terra. La risoluzione **θ** in secondi d’arco di un telescopio di apertura **D** per osservazioni alla lunghezza d’onda **λ** vale:

$$\theta = 1.22\,\frac{\lambda}{D}\cdot 206265''$$

Il telescopio dovrà avere quindi un diametro minimo $\mathbf{D_{Min}}$ pari a:

$$D_{Min} = 1.22\,\frac{\lambda}{\theta}\,206265'' = \frac{1.22\cdot 5500\cdot 10^{-10}\ \mathrm{m}\cdot 206265''}{1.2''} \simeq 0.12\ \mathrm{m} = 12\ \mathrm{cm}$$

Il rapporto tra la lunghezza focale **F** del telescopio e quella **f** dell’oculare utilizzato, fornisce l’ingrandimento **I**:

$$I = \frac{F}{f}$$

Dobbiamo allora calcolare il minimo valore dell’ingrandimento $\mathbf{I_{min}}$ dell’immagine del sistema binario che permette al nostro occhio di risolvere le due componenti:

$$I_{min} = \frac{\text{risoluzione occhio}}{\text{separazione angolare}} = \frac{2'}{1.2''} = \frac{120''}{1.2''} = 100$$

Problema 16

Segue soluzione

La focale massima $\mathbf{f_{max}}$ dell'oculare da utilizzare deve quindi essere pari a:

$$\mathrm{f_{max}} = \frac{\mathrm{F}}{I_{min}} = \frac{1000\ \mathrm{mm}}{100} = 10\ \mathrm{mm}$$

Occorre però ricordare che non è mai conveniente utilizzare un ingrandimento maggiore di un valore all'incirca pari all'apertura del telescopio espressa in mm, che nel caso in esame vale $I_{max} \simeq 120$. Otteniamo di conseguenza un valore minimo $\mathbf{f_{min}}$ per la focale dell'oculare da utilizzare pari a:

$$\mathrm{f_{m}}_{in} \simeq \frac{\mathrm{F}}{I_{max}} \simeq \frac{1000\ \mathrm{mm}}{120} \simeq 8.3\ \mathrm{mm}$$

Sappiamo che le due componenti di ζ Boötis hanno magnitudini apparenti identiche $m_1 = m_2 = m$ e che la magnitudine totale del sistema è $m_{tot} = 3.79$.

Dalla relazione che fornisce la somma di due magnitudini abbiamo:

$$\mathrm{m_{tot}} = -2.5 \cdot \log\ (10^{-0.4\mathrm{m}} + 10^{-0.4\mathrm{m}}) = -2.5 \cdot \log\ (2 \cdot 10^{-0.4\mathrm{m}}) = -2.5 \cdot \log\ 2 - 2.5 \cdot \log\ (10^{-0.4\mathrm{m}})$$

$$\mathrm{m_{tot}} + 2.5 \cdot \log\ 2 = \mathrm{m}$$

$$m \simeq \mathrm{m_{tot}} + 0.75 \simeq 4.54$$

Data la magnitudine apparente di ciascuna delle due componenti, calcoliamo la loro magnitudine assoluta **M** esprimendo la distanza **d** in parsec dalla relazione:

$$M = m + 5 - 5 \log d \simeq 4.54 + 5 - 5 \log\left(\frac{180\ anni\ luce}{3.2616\ \frac{anni\ luce}{parsec}}\right) \simeq 0.83$$

Problema 17

Il Telescopio Spaziale Hubble ha uno specchio con diametro $D_{HST} = 2.4$ m e orbita attorno alla Terra dalle ore 12:00 UT del 25 aprile 1990 a un'altezza sulla superficie $h_{HST} = 539$ km. Quante orbite attorno alla Terra ha completato HST alle ore 12:00 UT del 25 aprile 2020? Stimate le dimensioni minime di un corpo che HST è capace di distinguere sulla superficie della Terra osservando alla lunghezza d'onda $\lambda = 5500$ Å.

Soluzione.

Detti $\mathbf{R_T}$ e $\mathbf{M_T}$ raggio e massa della Terra, il periodo orbitale $\mathbf{T_{HST}}$ si ottiene dalla III legge di Keplero:

$$T_{HST} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot (R_T + h_{HST})^3}{G\,M_T}} \simeq \sqrt{\frac{39.48 \cdot 3.309 \cdot 10^{20}\ \mathrm{m}^3}{6.674 \cdot 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2 \cdot \mathrm{kg}} \cdot 5.972 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}} \simeq 5725\ \mathrm{s} \simeq 95.42\ \text{minuti}$$

Dalle 12:00 UT del 25 aprile 1990 alle 12:00 UT del 25 aprile 2020 sono trascorsi in totale $\Delta T = 10958$ giorni, in quanto dobbiamo considerare che gli anni 1992, 1996, 2000, 2004, 2008, 2012, 2016 e 2020 sono stati bisestili. Il numero di orbite $\mathbf{Orbite_{HST}}$ sarà quindi:

$$\mathrm{Orbite}_{HST} = \frac{\Delta T}{T_{HST}} \simeq \frac{10958\ \text{giorni} \cdot 86400 \frac{\mathrm{s}}{\text{giorno}}}{5725\ \mathrm{s}} \simeq 165.4 \cdot 10^3$$

Il potere risolutivo teorico $\boldsymbol{\alpha_{HST}}$ di HST in secondi d'arco è dato dalla relazione:

$$\alpha_{HST} = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D_{HST}} \cdot 206265'' \simeq 1.22 \cdot \frac{5500 \cdot 10^{-10}\mathrm{m}}{2.4\ \mathrm{m}} \cdot 206265'' \simeq 0''.058$$

Questo potere risolutivo consentirebbe a HST di distinguere sulla superficie della Terra oggetti con dimensioni: $d_{teorico} = h_{HST} \cdot \tan \alpha_{HST} \simeq 15\ \mathrm{cm}$

Tuttavia, se puntato verso la superficie della Terra HST subirà gli effetti dell'atmosfera, proprio come se osservasse verso lo spazio dalla superfice. Quindi il suo potere risolutivo effettivo $\mathbf{d_{effettivo}}$ sarà limitato dagli effetti dell'atmosfera terrestre e sarà dell'ordine di 1''. Avremo quindi:

$$d_{effettivo} = h_{HST} \cdot \tan 1'' = h_{HST} \cdot \tan\left(\frac{1''}{3600}\right) \simeq 2.6\ \mathrm{m}$$

Problema 18

Il Telescopio VLT dell'ESO è formato da quattro telescopi, ognuno con uno specchio con diametro d = 8.2m, che possono inviare la luce raccolta a un fuoco comune. Supponete che il VLT fotografi una stella di magnitudine m_{stella} = 23.0. Quanti fotoni provenienti da questa stella vengono raccolti in totale dai quattro telescopi del VLT ogni secondo? Assumete per i fotoni un'energia media $E = 4.8 \cdot 10^{-19}$ J ($J = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = W \cdot s$)

Soluzione.

Ricaviamo il flusso proveniente dalla stella F_{Stella} in unità di quello proveniente dal Sole F_{Sole} dalla differenza di magnitudine apparente: $m_{Stella} - m_{Sole} = -2.5 \log \frac{F_{Stella}}{F_{Sole}}$ da cui si ha:

$$F_{stella} = 10^{\left(\frac{m_{Sole} - m_{stella}}{2.5}\right)} \cdot F_{Sole} = 10^{\left(\frac{-26.74 - 23.0}{2.5}\right)} \cdot F_{Sole} \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_{Sole}$$

Detta **D** la distanza media Terra-Sole e $\mathbf{T_{Sole}}$ la temperatura della fotosfera solare, la quantità media di energia $\mathbf{F_{Sole}}$ proveniente dal Sole (costante solare) che arriva ogni secondo su un metro quadrato alla sommità dell'atmosfera della Terra è data dalla relazione:

$$F_{Sole} = \frac{4\pi \cdot R_{Sole}^2 \cdot \sigma \cdot T_{Sole}^4}{4\pi \cdot D^2} \simeq \frac{4.837 \cdot 10^{17} m^2 \cdot 5.670 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 \cdot K^4} \cdot 1.115 \cdot 10^{15} K^4}{2.238 \cdot 10^{22} m^2} \simeq 1366 \frac{W}{m^2}$$

E quindi otteniamo: $F_{stella} \simeq 1.27 \cdot 10^{-20} \cdot F_{Sole} \simeq 1.73 \cdot 10^{-17} \frac{W}{m^2}$

Poiché l'energia media dei fotoni della stella è $E = 4.8 \cdot 10^{-19}\, W \cdot s$, otteniamo che il numero di fotoni **n** in arrivo ogni secondo su una superficie di un metro quadrato è: $n = \frac{F_{stella}}{E} \simeq \frac{1.73 \cdot 10^{-17} \frac{W}{m^2}}{4.8 \cdot 10^{-19}\ W \cdot s} \simeq 36 \frac{fotoni}{m^2 \cdot s}$

L'area complessiva **A** di raccolta del VLT è data dalla somma delle aree dei quattro specchi da 8.2 m:

$A = 4 \cdot \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \simeq 211\, m^2$ ed è equivalente a quella di un singolo specchio con diametro di 16.4 m. Il numero totale **N** dei fotoni raccolti dal VLT sarà quindi:

$$N = n \cdot A \simeq 36 \frac{fotoni}{m^2 \cdot s} \cdot 211\, m^2 \simeq 7600 \frac{fotoni}{s}$$